Τοπολογία

16/3/2015

γ) $A=\overline{A} \iff A$ κλειστό

$\Rightarrow$) Εφόσον $\overline{A}$ είναι πάντα κλειστό αν $A=\overline{A}$, τότε το A είναι κλειστό

$\Leftarrow$) Αν το A είναι κλειστό τότε εφόσον $\overline{A}=\bigcap\{F,\ F$ κλειστό $A\subset F\}=A$

δ) Αν $A\subseteq B$ τότε $\overline{A}\subseteq\overline{B}$

απόδειξη

Αν $A\subseteq B$, τότε εφόσον $B\subseteq\overline{B}$

Προκύπτει $A\subseteq\overline{B}$.

Εφόσον το $\overline{B}$ είναι κλειστό, προκύπτει $\overline{A}\subseteq\overline{B}$

ε) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\subseteq A\cup B \Rightarrow \overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}\\ B\subseteq A\cup B \Rightarrow \overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}\\ \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\subseteq\overline{A}\\ B\subseteq\overline{B}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}\\ \qquad\text{και } \overline{A}\cup\overline{B} \text{ κλειστό}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

στ) $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l}A\cap B\subseteq A \Rightarrow \overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\\ A\cap B\subseteq B \Rightarrow \overline{A\cap B}\subseteq\overline{B}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$$

Παρατήρηση: Ο εγκλεισμός στο στ) μπορεί να είναι γνήσιος (δηλ. δεν ισχύει πάντα ισότητα)

Παράδειγμα: Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

$\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \overline{\emptyset}=\emptyset$

$\overline{\mathbb{Q}}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

Επίσης για $A=(0,1)$, $B=(1,2)$
$\overline{A\cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$
$\overline{A}\cap\overline{B} = [0,1]\cap[1,2] = \{1\}$

Πρόταση:
Έστω (X,ρ) και $A\subseteq X$ και ρ_A η σχετική μετρική στο A.
α) Αν $F\subseteq A$, τότε το F είναι κλειστό στο (A,ρ_A)
αν-αν υπάρχει K κλειστό στον (X,ρ) ώστε $F=A\cap K$.
β) Για κάθε $B\subseteq A$ ισχύει $cl_A(B)=A\cap cl_X(B)$
[όπου $cl_A(B)$ η κλειστή θήκη του B στον (A,ρ_A)
$cl_X(B)$ η κλειστή θήκη του B στον (X,ρ)]

απόδειξη
α) $\Rightarrow$) Έστω $F\subseteq A$ κλειστό στον (A,ρ_A)
Τότε το $A\setminus F$ είναι ανοιχτό στον (A,ρ_A)
και άρα (σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση)
υπάρχει G ανοιχτό στον X ώστε $A\setminus F = A\cap G$ (1)
Ισχυρισμός: $F=A\cap(X\setminus G)$
απόδ:
Αν $x\in F$, τότε $x\in A$ (αφού $F\subseteq A$)
και $x\notin G$ (διότι αν $x\in G$ τότε από (1) $x\notin F$ άτοπο)
Άρα $x\in F\cap(X\setminus G)$. Άρα $F\subseteq A\cap(X\setminus G)$
Αντίστροφα, αν $x\in A\cap(X\setminus G)$, τότε $x\in A$ και $x\notin G$
Τότε $x\in F$. (διότι αν $x\notin F$ τότε από την (1) $x\in G$ άτοπο)
Έτσι $A\cap(X\setminus G)\subseteq F$
Επομένως $F=A\cap(X\setminus G)$ και έχουμε το συμπέρασμα
για $K=X\setminus G$.
$\Leftarrow$) Αν υπάρχει K κλειστό στο X ώστε $F=A\cap K$
Τότε $A\setminus F = A\setminus(A\cap K) = A\cap(X\setminus K)$
με το $X\setminus K$ να είναι ανοιχτό στο X
Άρα (σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση) το $A\setminus F$ είναι
ανοιχτό στο A, άρα το F είναι κλειστό στο A.

β) Έστω $B \subseteq A$.

Το $cl_X(B)$ είναι κλειστό στο X, άρα (σύμφωνα με (α))
το $A \cap cl_X(B)$ είναι κλειστό στον (A, ρ_A) και
περιέχει το B. Άρα $cl_A(B) \subseteq A \cap cl_X(B)$

Αν F κλειστό στο A με $B \subseteq F$
(και θα δείξουμε ότι $A \cap cl_X(B) \subseteq F$)
Τότε υπάρχει K κλειστό στον X με $F = A \cap K$

Άρα $cl_X(B) \subseteq cl_X(A \cap K) \subseteq cl_X(K) = K \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap cl_X(B) \subseteq A \cap K = F$

Συνεπώς $A \cap cl_X(B) \subseteq cl_A(F)$

Επομένως $A \cap cl_X(B) = cl_A(B)$

Παράδειγμα:

Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική Θεωρούμε $A = (0,1) \cup \{2\} \cup [4,5)$.

ΛΥΣΗ

→ Το $(0,1)$ είναι ανοικτό στον A αφού $(0,1) = \underbrace{(0,1)}_{\text{ανοιχτό στον } \mathbb{R}} \cap A$

κλειστό στον A $(0,1) = \underbrace{[0,1]}_{\text{κλειστό στον } \mathbb{R}} \cap A$

→ Όμως το $\{2\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό στον A

άρα $\{2\} = \underbrace{\left(\frac{15}{8}, \frac{17}{8}\right)}_{\text{ανοιχτό στον } \mathbb{R}} \cap A$

$\{2\} = \underbrace{\{2\}}_{\text{κλειστό στον } \mathbb{R}} \cap A$

→ Το $[4,5)$ είναι ανοιχτό στον A, αφού $[4,5) = \underbrace{(3,5)}_{\text{ανοιχτό στον } \mathbb{R}} \cap A$

κλειστό στον A

αφού $[4,5) = \underbrace{[4,5]}_{\text{κλειστό στον } \mathbb{R}} \cap A$

→ Το $[4, \frac{9}{2})$ είναι ανοιχτό στο A αφού $[4, \frac{9}{2}) = (3, \frac{9}{2}) \cap A$

→ Το $[\frac{9}{2}, 5)$ είναι κλειστό στο A
αφού $[\frac{9}{2}, 5) = [\frac{9}{2}, 5] \cap A$
↑ κλειστό στο A.

Φυλλάδιο:
Ασκ 4: $x_n \to x$ και $y_n \to y$
να δειχθεί ότι... ← τυπογραφικό λάθος.

→ Για $B = [4, \frac{9}{2})$, $\Gamma = (\frac{9}{2}, 5)$

$$cl_A(B) = cl_{\mathbb{R}}[4, \tfrac{9}{2}) \cap A = [4, \tfrac{9}{2}] \cap A = [4, \tfrac{9}{2}]$$

$$cl_A(\Gamma) = cl_{\mathbb{R}}(\Gamma) \cap A = [\tfrac{9}{2}, 5] \cap A = [\tfrac{9}{2}, 5)$$

Πρόταση:
Έστω (X, ρ) μχ.
$A \subseteq X$, $x \in X$
$x \in \overline{A} \iff \rho(x, A) = 0$

(Υπενθύμιση: $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x,y) \ y \in A\}$)

απόδειξη
$\Rightarrow$) Έστω $x \in \overline{A}$
Προφανώς το 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\rho(x,y) \ y \in A\}$
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x \in \overline{A}$, $A \cap B_\rho(x, \varepsilon) \neq \emptyset$
Άρα υπάρχει y με $y \in A$, $\rho(x,y) < \varepsilon$.
Επομένως, $\inf\{\rho(x,y) \ y \in A\} = 0$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\rho(x, A) = 0$
Θδο $x \in \overline{A}$.

Έστω $\epsilon>0$. Επειδή $\rho(x,A)=0$

Υπάρχει $y\in A$ $\quad \rho(x,y)<\epsilon$

$$\Updownarrow$$

$$y\in B_\rho(x,\epsilon)$$

Άρα $A\cap B_\rho(x,\epsilon)\neq\emptyset$

Επομένως, $x\in\overline{A}$

<u>Πόρισμα:</u>

Έστω (X,ρ) μχ $A\subseteq X$

Τότε A κλειστό $\iff \forall x\in X\setminus A \quad \rho(x,A)>0$

<u>Πρόταση:</u>

Έστω (X,ρ) μχ $A\subseteq X$

Τότε: (i) $X\setminus\overline{A}=(X\setminus A)^\circ$

(ii) $X\setminus A^\circ=\overline{X\setminus A}$

<u>απόδειξη:</u>

(i) $x\in X\setminus\overline{A} \iff x\notin\overline{A}$

$\iff \exists\epsilon>0 \quad A\cap B_\rho(x,\epsilon)=\emptyset$

$\iff \exists\epsilon>0 \quad B_\rho(x,\epsilon)\subseteq X\setminus A$

$\iff x\in(X\setminus A)^\circ$

(ii) $x\in X\setminus A^\circ \iff x\notin A^\circ \iff \forall\epsilon>0 \quad B_\rho(x,\epsilon)\not\subseteq A$

$\iff \forall\epsilon>0 \quad B_\rho(x,\epsilon)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$

$x\in A^\circ \iff \exists\epsilon>0 \quad B_\rho(x,\epsilon)\subseteq A \iff x\in \overline{X\setminus A}$

Ορισμός:

Εστω (X,ρ) μ.χ και $A \subseteq X$.

Ενα $x \in X$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A, αν

$\forall \varepsilon>0 : B_\rho(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

(δηλ, αν σε κάθε ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x περιέχονται στοιχεία του A εκτός του x)

Συμβολίζουμε με A' και καλούμε παράγωγο σύνολο του A το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του A.

Παρατήρηση: $\bar{A} = A \cup A'$

απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $A \subseteq \bar{A}$ και αν $x \in A'$ τότε

$\forall \varepsilon>0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$ Άρα $A' \subseteq \bar{A}$

Ετσι $A \cup A' \subseteq \bar{A}$

Εστω $x \in \bar{A}$. δξο $x \in A \cup A'$

Υποθ. ότι $x \notin A \rightarrow A \setminus \{x\} = A$

Εφόσον $x \in \bar{A}$

$\forall \varepsilon>0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon>0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, $x \in A'$

Ετσι $\bar{A} \subseteq A \cup A'$

Επομένως, $\bar{A} = A \cup \bar{A}$

Παράδειγμα:

Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

Εστω $A = (0,1) \cup \{2,3\}$

Τότε $A' = [0,1]$, $\bar{A} = [0,1] \cup \{2,3\}$

Ορισμός:
Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A\subseteq X$
Ένα $x\in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του A αν $\exists \varepsilon>0$
$A\cap B_\rho(x,\varepsilon)=\{x\}$

Παραδείγματα:
α) Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική για $A=(0,1)\cup\{2,3\}$
Τα σημεία $2,3$ είναι μεμονωμένα σημεία του A.
Κάθε $n\in\mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathbb{N}$
Ομοίως για το $\mathbb{Z}$

β) Αν (X,ρ) διακριτός μετρικός χώρος και $A\subseteq X$
τότε κάθε $x\in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A.
διότι $A\cap B_\rho(x,1)=A\cap\{x\}=\{x\}$

Παρατήρηση: Αν (X,ρ) μ.χ. $A\subseteq X$, $x\in A$
το x είναι μεμονωμένο σημείο του A $\Longleftrightarrow$ Το $\{x\}$ είναι ανοιχτό στο A.

Ορισμός:
Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A\subseteq X$
Ένα $x\in X$ λέγεται συνοριακό σημείο του A, αν $\forall\varepsilon>0$
$B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ και $B_\rho(x,\varepsilon)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$
Στο σύνολο των συνοριακών σημείων του A
συμβολίζεται $bd(A)$ ή ∂A

Παρατήρηση: $bd(A)=\overline{A}\cap\overline{(X\setminus A)}=\overline{A}\setminus A^\circ$

Έτσι το σύνορο $bd(A)$ του A είναι κλειστό σύνολο.

ΠΥΚΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός:
Εστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $D \subseteq X$. Το D λέγεται πυκνό αν $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα:
Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική
Τα σύνολα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά

Πρόταση: (για τα σημεία συσσώρευσης)
Εστω (X,ρ) μ.χ. $A \subseteq X$ και $x \in X$. ΤΑΕΙ
(i) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $A \cap B_\rho(x,\varepsilon)$ είναι άπειρο

απόδειξη
(ii) $\Rightarrow$ (i) Εστω $\varepsilon > 0$, τότε $A \cap B_\rho(x,\varepsilon)$ είναι άπειρο
$\Rightarrow B_\rho(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$
Αρα x σημείο συσσώρευσης του A.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Εστω x σημείο συσσωρ. του A
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ το σύνολο $A \cap B_\rho(x,\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο
Εστω $B_\rho(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$
Θέτουμε $\delta = \min\{\rho(x,x_1), \rho(x,x_2), \dots, \rho(x,x_k)\}$
Τότε $\delta > 0$
$B_\rho(x,\delta) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ Ατοπο, διότι το x είναι σημείο συσσωρ. του συνόλου.

Πρόταση
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subseteq X$ ΤΑΕΙ:
(i) Το D είναι πυκνό στο X
(ii) Για κάθε G ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X ισχύει
$G \cap D \neq \emptyset$
(iii) $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $B_\rho(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$
(iv) $\forall x \in X$ υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. στο D με $x_n \to x$
απόδειξη
(i) ⇒ (ii) Έστω $x \in G$. Τότε $\exists \varepsilon > 0$ $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G$
Εφόσον $x \in X = \overline{D}$ $B_\rho(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow G \cap D \neq \emptyset$

(ii) ⇒ (iii) Άμεσο εφόσον $B_\rho(x, \varepsilon)$ ανοικτό.

(iii) ⇒ (i) Άμεσο διότι το (iii) λέει ότι $X \subseteq \overline{D}$
άρα $\overline{D} = X$ άρα D πυκνό.

(i) ⇒ (iv) Εφόσον $\overline{D} = X$ $\forall x \in X$ ισχύει $x \in \overline{D}$ άρα
υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. στο D με $x_n \to x$.

(iv) ⇒ (i) $\forall x \in X$ $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. στο D με $x_n \to x$
άρα $x \in \overline{D}$ Άρα $\overline{D} = X$ ⇒ D πυκνό.

ΑΣΚΗΣΗ
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος
$A \subseteq X$ με $A \neq \emptyset$ και $x \in X$. Νδο: $\rho(x, \overline{A}) = \rho(x, A)$
$\inf\{\rho(x,y) : y \in \overline{A}\}$ $\inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$
ΛΥΣΗ
Εφόσον $A \subseteq \overline{A}$ $\{\rho(x,y) : y \in A\} \subseteq \{\rho(x,y) : y \in \overline{A}\}$

άρα $\inf\{\rho(x,y) : y \in \overline{A}\} \leq \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$
$\rho(x, \overline{A}) \leq \rho(x, A)$

Αντδο: $\rho(x,A) \le \rho(x,\bar{A})$

Αρκεί: $\forall \varepsilon>0 : \rho(x,A) \le \rho(x,\bar{A}) + \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon>0$

Επιλέγουμε $y \in \bar{A}$

ώστε $\rho(x,y) < \rho(x,\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$

Εφόσον $y \in \bar{A}$ υπάρχει $z \in A$ με $\rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$

Συνεπώς, $\rho(x,A) \le \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$= \rho(x,\bar{A}) + \varepsilon$.

Άρα $\rho(x,A) \le \rho(x,\bar{A})$

Επομένως $\rho(x,A) = \rho(x,\bar{A})$

Παρόμοια παραδείγματα:

1. $diam(A) = diam(\bar{A})$
2. $\rho(A,B) = \rho(\bar{A},\bar{B})$

$\Bigg\}$ με (X,ρ) μ.χ.

$\emptyset \neq A \subseteq X$

$\emptyset \neq B \subseteq X$

$\vdash\!\dashv$